Logaritmos

definición: sea $\begin{cases} a>0, a\neq 1, a\in\mathbb{R} \\ b>0, b\in\mathbb{R} \\ c\in\mathbb{R} \end{cases}$

ELEMENTOS
base
Argumento
valor log

Entonces $\log_a(c)=b \iff a^b=c$

note que a y b deben ser positivos
y que a no puede ser 1

Esemplos.

$\log_5(25)=\square \iff 5^{\square}=25$

$\log_2 16=\square \iff 2^{\square}=16$

$\log_{100}(10.000)=\square \iff 100^{\square}=10000$

$\log_3(81)=\square \iff 3^{\square}=81$

* EJERCICIOS DE EJEMPLO

Calcule: $\log_5 125 = 3$ solucion: $5^3 = 125 \Rightarrow \log_5 125 = 3$

$\log_{10} 1000 = 3$ solución $10^3 = 1000 \Rightarrow \log_{10} 1000 = 3$

$\log_4 16 = 2$ sol: $4^2 = 16 \Rightarrow \log_4 16 = 2$

$\log_2 32 = 5$ sol $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32 \Rightarrow \log_2 32 = 5$

¿Cuál es el valor de la base si?:

$\log_a (100) = 2$ sol: $\log_a (100) = 2 \Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow \underbrace{a = \pm 10}_{\text{solo caso positivo}}$

$$\boxed{a = 10}$$

$\log_a 216 = 3$ sol: $\log_a 216 = 3 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a^3 = 216$

$$\sqrt[\cancel{3}]{a^{\cancel{3}}} = \sqrt[3]{216}$$

$$\boxed{a = 6}$$

Logaritmo de 1

$$\log_a 1 = 0$$

La explicación es suponer un X tal que:

$\log_a(1) = X$ entonces $a^X = 1$ por lo que $X = 0$ ya que $\boxed{a^0 = 1}$

así: $\log_a(1) = 0$

Ejemplos

$\log(1) = 0$

$\log_5(1) = 0$

$\log_{\sqrt{3}}(1) = 0$

$\log_{\frac{3}{4}}(1) = 0$

Propiedades de los logaritmos

Logaritmo de la identidad

$$\log_a a = 1$$

esto se comprueba ya que

$\log_a a = x \Leftrightarrow a^x = a$ y como $a^1 = a$

$\hookrightarrow a^x = a^1$

$\Rightarrow x = 1$ // la única forma posible

Entonces

$\log_{100}(100) = 1$

$\log_7(7) = 1$

$\log_K(K) = 1$

$\log_{m^2} m^2 = 1$

$\log_{0,5} 0{,}5 = 1$

Logaritmo de la Suma

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$$

Explicacion:

Supoñemos $\log_a(b) = m$ y $\log_a(c) = n$ ← Les asignamos un valor supuesto

Luego $a^m = b$ y $a^n = c \Rightarrow b \cdot c = a^m a^n = a^{m+n}$ ← Prop potencia

Finalmente: $bc = a^{m+n} \overset{}{\underset{\text{def}}{\Rightarrow}} \log_a(bc) = m+n$.

$\Rightarrow \log_a(b \cdot c) = \log_a(b) \cdot \log_a(c)$

quedando demostrado

Ejemplo:

$\log_{10} 5 + \log_{10} 20 = \log_{10}(5\ 20) = \log_{10}(100) = 2$

como $10^2 = 100$

$\log_{10} 100 = 2$

$\log_4 2 + \log_4 32 = \log_4 (2 \cdot 32) = \log_4(64) = 3$

$4^3 = 64$

$\log_6 3 + \log_6 72 = \log_6(3\ 72) = \log_6 216 = 3$

$6^3 = 216$

Logaritmo de la diferencia

$$\log_a b - \log_a c = \log_a (b-c)$$

Explicación: Sea $\log_a(b) = m$ y $\log_a(c) = n$

Entonces $a^m = b$ y $a^n = c$ por lo cuál

$$\frac{b}{c} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{y entonces } a^{m-n} = \frac{b}{c}$$

Luego $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = m - n$ por lo que

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a c$$ quedando demostrado

Ejemplos

$$\log_2(12) - \log_2(3) = \log_2\left(\frac{12}{3}\right) = \log_2 4 = 2$$

$\rightarrow 2^2 = 4$

$$\log(500) - \log(5) = \log\left(\frac{500}{5}\right) = \log(100) = 2$$

$\rightarrow 10^2 = 100$

$$\log_3(24) - \log_3(8) = \log_3\left(\frac{24}{8}\right) = \log_3 3 = 1$$

Logaritmo de una Potencia

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

Explicación:

Sabemos que: $\log_a (b^n)$

$$= \log_a(\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdots b}_{n-\text{veces}})$$

$$= \underbrace{\log_a b + \log_a b + \log_a b + \log_a b \cdots \log_a b}_{n-\text{veces}}$$

$$= n \cdot \log_a b$$

Ejemplos: $\log_4 (4^3) = 3 \cdot \log_4 (4) = 3 \cdot 1 = 3$

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{16}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{2^4}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^4\right) = 4 \log_{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{2}\right) = 4 \cdot 1 = 4$$

$$\log_{\sqrt{3}} (3) = \log_{\sqrt{3}} \left((\sqrt{3})^2\right) = 2 \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\log_5 (625) = \log_5 (5^4) = 4 \cdot \log_5 (5) = 4 \cdot 1 = 4$$

Cambio de base:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Esto se comprueba así:

Suponemos $c^x = a$ y $c^y = b$

para que: $\log_c a = x$, $\log_c b = y$ y entonces

$$\log_a b = \log_{c^y} c^x = \frac{x}{y} = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$$

use propiedad

$$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$\log_{100} 10000 = \frac{\log 10000}{\log 100} = \frac{\log 10^4}{\log 10^2} = \frac{4\log 10}{2\log 10} = \frac{4}{2} = 2$$

Cancelación de la Potencia

$$\log_x X^y = y$$

ya que $\log_x (x^y) = y \log_x (x) = y \cdot 1 = y$

$$\log_7 (7^3) = 3 \cdot \log_7 7 = 3 \cdot 1 = 3$$

$$\log_4 (4^6) = 6 \cdot \log_4 (4) = 6 \cdot 1 = 6$$

$$\log (100000) = \log (10^5) = 5 \log (10) = 5 \cdot 1 = 5$$

$$\log_{0,\bar{2}} \left(\left(\frac{2}{9}\right)^7\right) = \log_{0,\bar{2}} (0,\bar{2})^7 = 7 \cdot \log_{0,\bar{2}} (0,\bar{2}) = 7 \cdot 1 = 7$$

Cancelacion del Logaritmo

$$x^{\log_x y} = y$$

Supongamos que $x^{\log_x(y)} = c$

entonces $\log_x(c) = \log_x(y)$ y esto

solo pasa si: $c = y$ Luego

$x^{\log_x(y)} = c = y$ y por lo tanto

$$x^{\log_x(y)} = y$$

Ejemplos

$3^{\log_3 8} = 8$ // $6^{\log_6 12} = 12$ //

$10^{\log 7} = 7$ // $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3} = 3$ //

Logaritmo del inverso multiplicativo.

$$\log_a \frac{1}{a} = -1 \quad ó \quad \log_a a^{-1} = -1$$

Esto se explica ya que.

$$\log_a \frac{1}{a} = X \Rightarrow a^x = \frac{1}{a}, \text{ pero } \frac{1}{a} = a^{-1}$$

$$\hookrightarrow a^x = a^{-1}$$

$$\boxed{X = -1}$$ solo pasaría cuando

Ejemplos

$$\log_2 \frac{1}{2} = -1 \qquad \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$$

$$\log_3 \frac{1}{3} = -1 \qquad \log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$$

$$\log_7 \frac{1}{7} = -1 \qquad \log_{\frac{1}{k}} K = -1$$

Logaritmo del inverso multiplicativo

$$\log_m \frac{x}{y} = -\log_m \frac{y}{x}$$

Esto se verifica ya que

$$\log_m \frac{x}{y} = \log_m \left(\frac{y}{x}\right)^{-1} = -1 \cdot \log_m \frac{y}{x} = -\log_m \frac{y}{x}$$

Ejemplos:

▷ $\log \frac{3}{4} = -\log \frac{4}{3}$

▷ $\log_3 \frac{2}{5} = -\log_3 \frac{5}{2}$

▷ $\log_2 \left(\frac{3}{4}\right) - \log_2 \left(\frac{5}{4}\right) = \log_2 \left(\frac{3}{4}\right) + \log_2 \left(\frac{4}{5}\right)$

$= \log_2 \left(\frac{3}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{5}\right) = \log_2 \left(\frac{3}{5}\right) //$

te permite convertir una resta en una suma, cambiando de dividir a multiplicar al juntar los logaritmos

Log. cuya base es potencia del argum

$$\log_{x^y} x = \frac{1}{y}$$

ya que $\log_{x^y} x = \frac{1}{y} \iff (x^y)^{\frac{1}{y}} = x \iff x = x$

entonces se demuestra así:

si $x = x \Rightarrow x^{\frac{y}{1} \cdot \frac{1}{y}} = x \Rightarrow (x^y)^{\frac{1}{y}} = x$

y convirtiendo esto en logaritmo $\log_{x^y} x = \frac{1}{y}$

▷ $\log_{6^3} 6 = \frac{1}{3}$ // ▷ $\log_{5^7} 5 = \frac{1}{7}$ //

▷ $\log_8 2 = \log_{2^3} 2 = \frac{1}{3}$ // ▷ $\log (1000) = \log 10^3 = \frac{1}{3}$ //

Log cuya base es raiz del argumento

$$\log_{\sqrt[y]{x}} x = y$$

También se puede escribir

★ $$\log_{x^{\frac{1}{y}}} X = y$$

se demuestra al saber la propiedad anterior y haciendo una simple sustitución

$\log_{x^{y}} (x) = \frac{1}{y}$, sustituiremos "y" e "$\frac{1}{y}$" ..

$y = \frac{1}{n}$, Por lo que $yn = 1$, Por lo cual $\frac{1}{y} = n$

$\log_{x^{\frac{1}{n}}} X = n$ o bien $\log_{\sqrt[n]{x}} X = n$

que es lo que se quería demostrar

Ej: $\log_{\sqrt[5]{4}} 4 = 5$ $\qquad$ $\log_{\sqrt{3}} 3 = 2$

Intercambio de base y argumento

☆ $$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

veamos:

como a y b > 0
no habra problemas

$$\log_a b = c \Rightarrow a^c = b \Rightarrow \sqrt[c]{a^c} = \sqrt[c]{b}$$

$$\Rightarrow a = b^{\frac{1}{c}}$$

$$\Rightarrow b^{\frac{1}{c}} = a$$

$$\Rightarrow \log_b a = \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Ejemplos

$$\log_{16} 4 = \frac{1}{\log_4 16} = \frac{1}{\log_4 4^2} = \frac{1}{2\log_4 4} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

$$\log_{125} 5 = \frac{1}{\log_5 125} = \frac{1}{\log_5 5^3} = \frac{1}{3\log_5 5} = \frac{1}{3 \cdot 1} = \frac{1}{3}$$

Log cuya base y Argum tienen Potencia

(común)

$$\log_{x^m} x^y = \frac{y}{m}$$

Esto ya que

$$\log_{x^m} x^y = y \underbrace{\log_{x^m} x}_{\text{propiedad antes vista}} = y \cdot \frac{1}{m} = \frac{y}{1}\,\frac{1}{m} = \frac{y}{m}$$

Ejemplo:

$$\log_{2^2} 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2} \quad //$$

$$\log_{5^3} 5^7 = \frac{7}{3} \quad //$$

$$\log_{5^3} 25 = \log_{5^3} 5^2 = \frac{2}{3}$$

$$\log_{4^2} 8^4 = \log_{(2^2)^2} (2^3)^4 = \log_{2^4} 2^{12} = \frac{12}{4} = 3$$

Logaritmos de 2 potencias distintas

$$\log_{a^b} c^d = \frac{d}{c}\log_a c$$

$$\log_{a^b} c^d = d\log_{a^b} c = d\,\frac{\log c}{\log a^b} =$$

$$d\,\frac{\log c}{b\log a} = \frac{d}{b}\cdot\frac{\log c}{\log a} = \frac{d}{b}\cdot\log_a c \quad //$$

así se usa

$$\log_{100^2} 1000^3 = \frac{3}{2}\log_{100} 1000$$

$$= \frac{3}{2}\underbrace{\log_{10^2} 10^3}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

deberé usar la propiedad

$$\log_{x^n} x^m = \frac{m}{n}$$

Formulario:

definición $\quad \log_a c = b \iff a^b = c$

condición: $a > 0 \quad a \neq 1$
$c > 0$
$b \in \mathbb{R}$

① $\log_a 1 = 0$ "Log de 1"

② $\log_a a = 1$ "Log de sí mismo"

③ $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$

④ $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$

Log de suma y resta

⑤ $\log_a b^c = c \log_a b$ "Sacar exponente"

⑥ $\log_a (b) = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ "Nueva base"

(7) $\log_a a^b = b$

(8) $a^{\log_a b} = b$

} cancelar potencia y logaritmo

(9) $\log_a\left(\frac{1}{a}\right) = -1$ "Log del inverso"

(10) $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = -\log_a\left(\frac{c}{b}\right)$ "invertir argumento del Log"

(9) $\log_{a^b} a = \frac{1}{b}$ "La base es potencia del argumento"

(10) $\log_{a^{\frac{1}{b}}} a = \log_{\sqrt[b]{a}} a = b$ "La base es raiz del argumento"

(11) $\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$ "invertir base y argumento"

(12) $\log_{a^b} a^c = \frac{c}{b}$ "base y argumento son potencias de un valor"

(13) $\log_a \sqrt[c]{b} = \log_a b^{\frac{1}{c}} = \frac{1}{c}\log_a b$ "Log de una raiz"

(14) $\log_{a^b} c^d = \frac{d}{b}\log_a c$ "Log de dos Potencias distintas"

Ademas:

★ $\underbrace{\log a = \log_{10} a}_{\text{sin indice es base 10}}$

★ no existe Logaritmos de números negativos

$$\log_a(-100) = \nexists$$

★ no existen logarítmos de base neg

$$\log_{-3} 9 = \nexists$$

☆Las 8 primeras propiedades son las mas importantes, saber otras podría ayudarte a resolver proble-mas mas facilmente.

Nota: como vez, Lo importante es que aprendas hasta la propiedad 8, Las extra, son para que puedas practicar el uso de las anteriores, Por que para demostrar unas propiedades es necesario el uso de otras propiedades, tener esa profundidad de aprender mas de lo mínimo te da ventaja frente a otras personas

Por supuesto Profundizar es voluntario, cada uno sabe lo que hace. Con las 8 primeras puedes hacer todo.

Usos de logaritmos

★ la cantidad de digitos de un **número** esta relacionado con los logaritmos

Recordemos que $\text{Log}\,X = \text{Log}_{10}\,X$

USO calculadora aquí:

parte entera $[x]$

n digitos	número n	$\text{Log}(n)$	$=$ valor	$[\text{valor}+1]$
3	357	$\text{Log}(357)$	$=$ 2,55	$[3{,}55]=3$
3	889	$\text{Log}(889)$	$=$ 2,95	$[3{,}95]=3$
4	1000	$\text{Log}(10^3) = 3\cancelto{1}{\text{Log}\,10}$	$=$ 3	$[4]=4$
4	1125	$\text{Log}(1125)$	$=$ 3,05	$[4{,}05]=4$
4	8973	$\text{Log}(8973)$	$=$ 3,95	$[4{,}95]=4$
5	10000	$\text{Log}(10^4) = 4\,\cancelto{1}{\text{Log}\,10}$	$=$ 4	$[5]=5$
5	32757	$\text{Log}(32757)$	$=$ 4,51	$[5{,}51]=5$

Si te fijas calcular el logaritmo te da un número único, pero que predice el n° de digitos

☆ Page Rank

un navegador necesita comparar y rankear las paginas web que investiga, para ello puede usar logaritmos:

Pagina	n° vistas	Log(n°)	[Valor]
aa com	28	1,44..	1
bc cl	217	2,33..	2
efg. KS	354	2,54..	2
amn ef	444	2,64.	2
bst.co	6974	3,84..	3
af. il	8955	3,95	3
emi no	12 000	4,07..	4
car tv	87000	4,93	4

asi puedes categorizar un ranking donde es esperable que los de un lugar que sea mas alto deba lograr muchas veces (10) lo que con 1 ranking de 1 lugar —

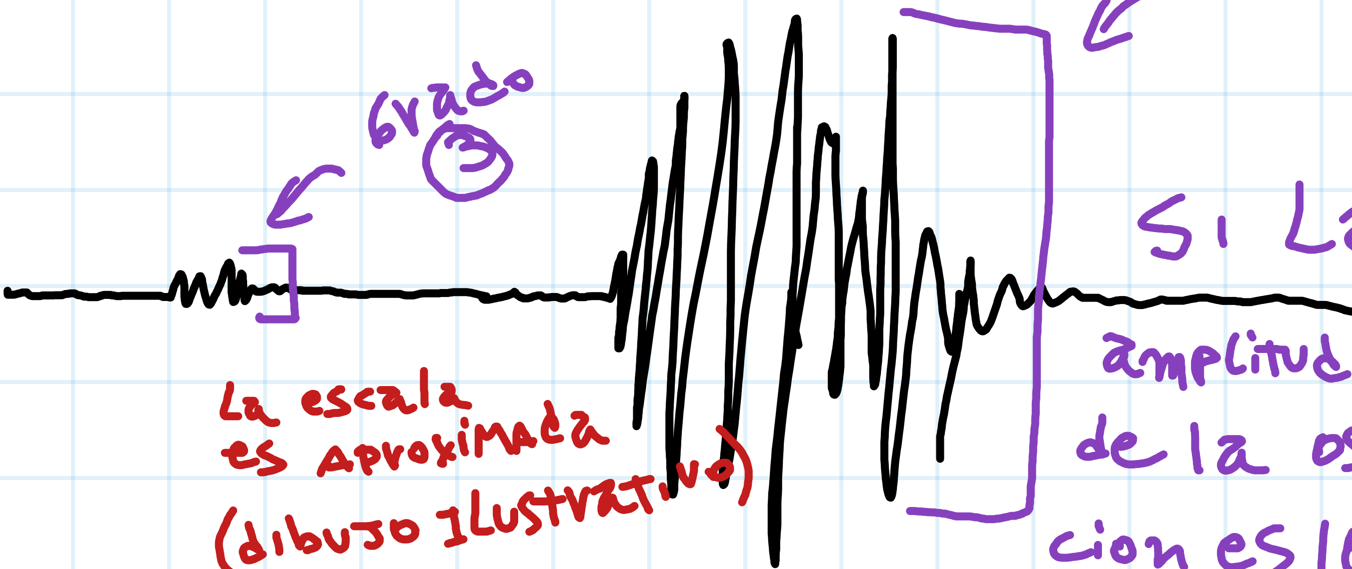
★ Escala richter, es una comparación

$$\boxed{M = \log\left(\frac{A}{S}\right)}$$

A = Amplitud

S = Amplitud Estándart ⇒ unidad base

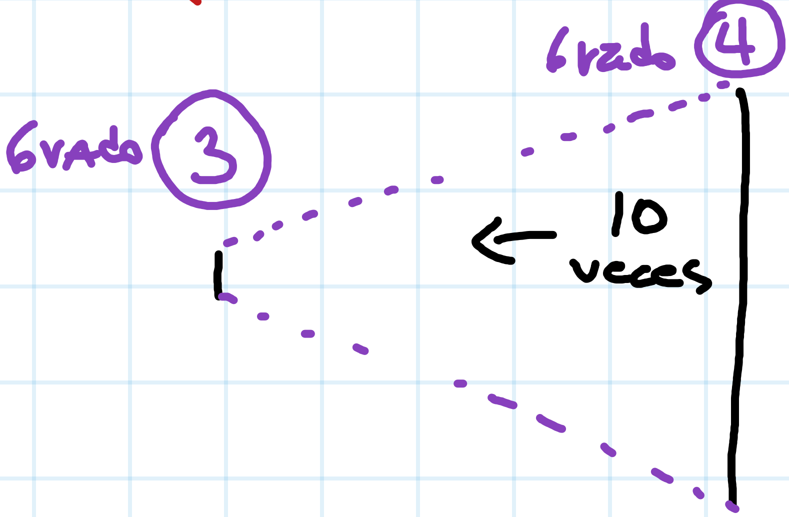
↑ usar esta Fórmula te permite saber la magnitud de un terremoto



Si La amplitud de la oscilacion es 10 veces + grande La escala solo subirá 1 grado

↓

Por eso el Logaritmo base 10



☆ EJERCICIOS

hallar

$\log_3 9 = 2$ // $3^2 = 9$

$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \cancel{\log_3 3} = 4$ //

$\log_4 64 = 3$ // $4^3 = 64$

$\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cancel{\log_2 2} = \frac{1}{2}$ //

$\log_{10} 0{,}01 = \log \frac{1}{100} = \log \frac{1}{10^2} = \log 10^{-2}$

$= -2 \cancel{\log 10} = -2$ //

$\log_4 1 = 0$ $4^0 = 1$

$\log_5 (0{,}2) = \log_5 \left(\frac{2}{10}\right) =$

$\to = \log_5 \left(\frac{1 \cdot \cancel{2}}{5 \cdot \cancel{2}}\right) = \log_5 \left(\frac{1}{5}\right) = \log_5 5^{-1} = -1 \cancel{\log_5 5} = -1$ //

Encuentra X

$\log_2 8 = X$ R: $\log_2 8 = 3$, $x = 3$

$2^x = 8$

$2^x = 2^3$

$x = 3$

$\log_x 49 = 2$ R $\log_7 49 = 2$, $x = 7$

$x^2 = 49$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{49}$

$|x| = 7$

$x = 7$ o $\cancel{x = -7}$

No puede

$\log_3 X = -2$ R $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, $X = \frac{1}{9}$

$3^{-2} = X$

$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = X$

$\frac{1}{9} = X$

$\log_{\frac{1}{100}} 100 = x$ R $\log_{\frac{1}{100}} 100 = -1$

$\left(\frac{1}{100}\right)^x = 100$

$(100^{-1})^x = 100^1$

$100^{-x} = 100^1$

$-x = 1$

$x = -1$

calcule

$\log_6 \frac{1}{36} = \log_6 \frac{1}{6^2} = \log_6 6^{-2} = -2 \log_6 \cancel{6}^{1} = -2$

$\log_2 \sqrt[3]{32} = \log_2 32^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_2 32 = \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3}$

$2^5 = 32$

$\log_6 3 + \log_6 12 = \log_6 (3 \cdot 12) = \log_6 6^2 = 2 \cancel{\log_6 6} = 2$

$\log_2 26 - \log_2 13 = \log_2 \left(\frac{26}{13}\right) = \log_2 2 = 1$

Compruebe que:

$$\frac{\log 6 + \log 2}{\log 9 + \log 8 - \log 6} = 1$$

$$= \frac{\log(6\cdot 2)}{\log(9\cdot 8) - \log 6} = \frac{\log 12}{\log 72 - \log 6}$$

$$= \frac{\log 12}{\log\left(\frac{72}{6}\right)} = \frac{\log 12}{\log 12} = 1$$

$$\frac{72}{6} = \frac{9\cdot 8}{2\cdot 3} = \frac{\cancel{3}\,3\cdot 2\,2\,\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 1} = 3\,2\,2 = 12$$

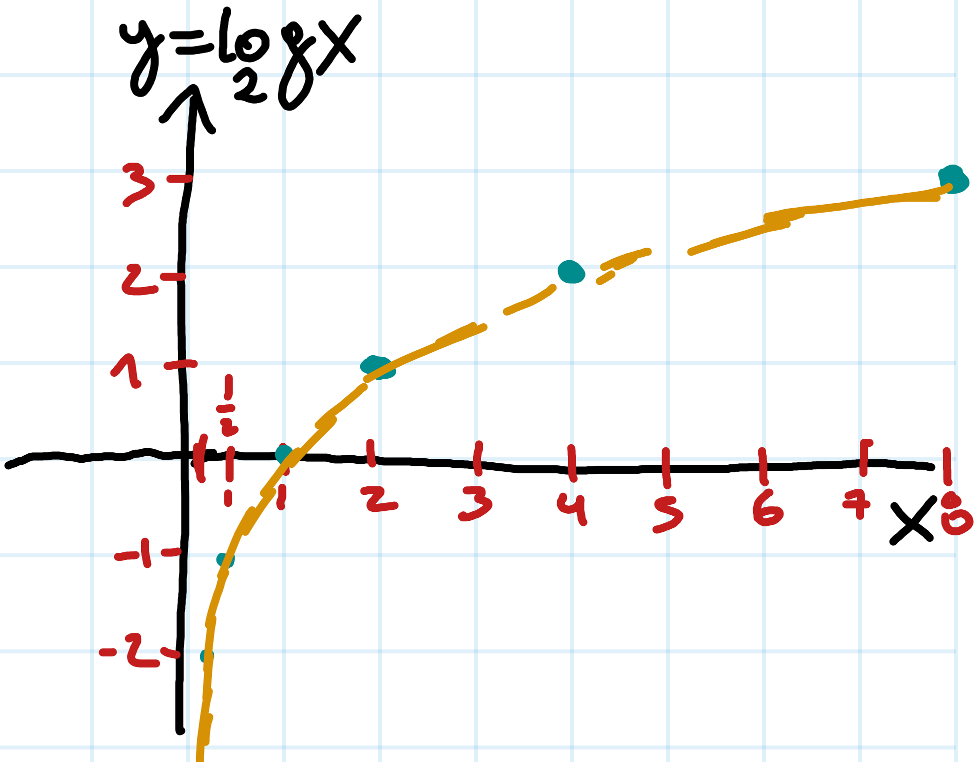
¿Cuánto es $\log_{64} 512$?

$$\log_{64} 512 = \log_{8^2} 8^3 = \frac{\log_8 8^3}{\log_8 8^2} = \frac{3\cancel{\log_8 8}\cdot 1}{2\cancel{\log_8 8}\cdot 1} = \frac{3}{2}$$

Graficos Logarítmos con base $a > 1$

Probemos alguna base mayor a 1, $y = \log_2 x$

x	$y = \log_2 x$
8	$\log_2 8 = 3$
4	$\log_2 4 = 2$
2	$\log_2 2 = 1$
1	$\log_2 1 = 0$
$\frac{1}{2}$	$\log_2 \frac{1}{2} = -1$
$\frac{1}{4}$	$\log_2 \frac{1}{4} = -2$



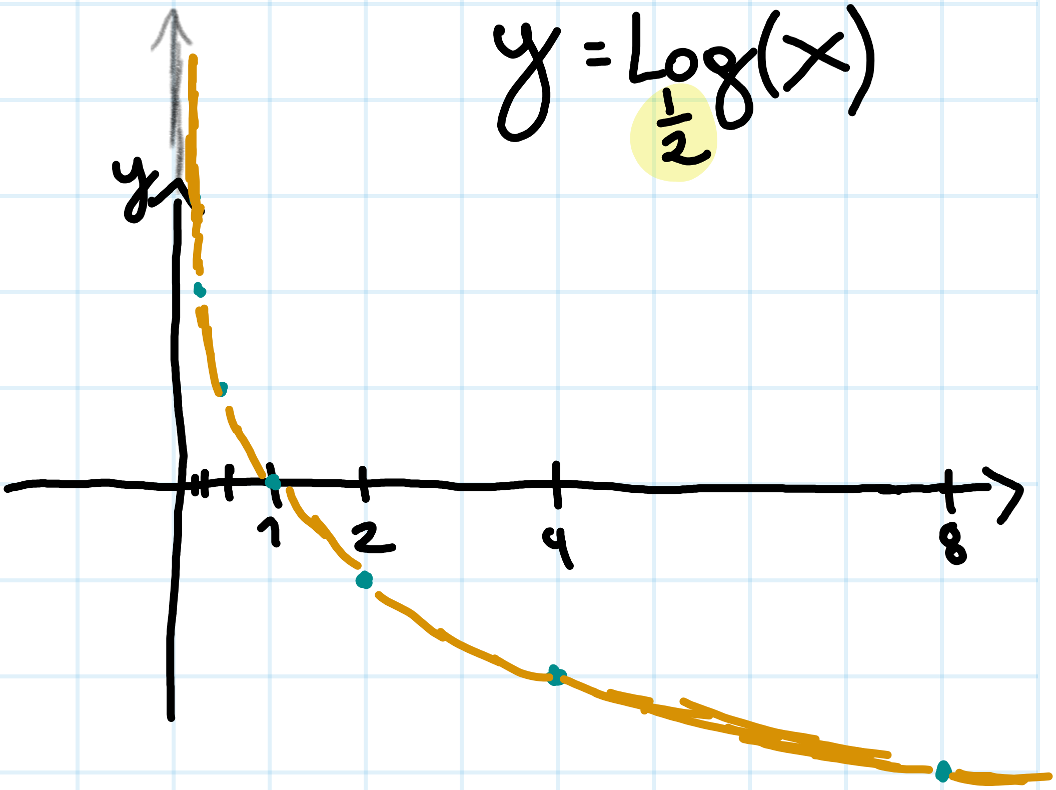
La grafica de logaritmos nos muestra una curva que crece mas rapido al principio y tiende a estabilizarse entre mas crece el número.

esto pasa cuando la base es mayor que 1

★ Logaritmos menores que 1 $(a<1)$ tienen una forma similar pero la posición es otra

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(x)$$

x	$y = \log_{1/2} x$
$\frac{1}{8}$	$\log_{1/2} \frac{1}{8} = 3$
$\frac{1}{4}$	$\log_{1/2} \frac{1}{4} = 2$
$\frac{1}{2}$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$
1	$\log_{1/2} 1 = 0$
2	$\log_{1/2} 2 = -1$
4	$\log_{1/2} 4 = -2$
8	$\log_{1/2} 8 = -3$



★ En ambas graficas las curvas de los logaritmos dan $y=0$, es decir cortan el eje x en $x=1$

★ como observamos las curvas de logaritmos cambian en funcion de si la base es mayor o menor que 0

Espero que este manual de logaritmos sea de su utilidad

Estudiar y Practicar

Un talento es un don y todos probablemente tenemos distintos dones, ahora piensa.

¿Para que existen academias de Karate si los fuertes ya sabemos quienes son?

Estudiar y Practicar es para aquellos que creemos en nosotros y estamos dispuestos a saber que cuesta, que aveces no es simple, pero creemos en nosotros.

"Los fuertes tambien se crean con esfuerzo"

Cree en ti ✓